Сумин Михаил Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: msumin@sinn.ru

Mikhail Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: msumin@sinn.ru

УДК 517.95

УСЛОВИЯ СОХРАНЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ [1]

© **В. И. Сумин, А. В. Чернов**

Ключевые слова: вольтерровы операторные уравнения; условия сохранения глобальной разрешимости.

Аннотация: Дается обзор полученных авторами достаточных условий сохранения глобальной разрешимости вольтерровых операторных уравнений, а также возможностей их конкретного применения к различным управляемым начально-краевым задачам для нелинейных уравнений с частными производными.

В [1] было предложено для изучения распределенных оптимизационных задач использовать функциональные уравнения вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \qquad t \in \Pi \subset \mathbf{R}^n, \qquad z \in L_p^m \equiv (L_p(\Pi))^m\,, \tag{1}$$

где $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^s \to \mathbf{R}^m$, $v(.) : \Pi \to \mathbf{R}^s$ — управляющая функция, $A[.] : L_p^m \to L_q^l$ — оператор, вольтерров на некоторой системе T измеримых подмножеств Π в том смысле, что $\forall H \in T$ значения $A[z](t)$, $t \in H$, не зависят от значений $z(t)$, $t \in \Pi \setminus H$. Приведенное определение [1] вольтерровости функционального оператора является непосредственным многомерным обобщением известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра и означает, что $\forall H \in T \quad P_H A = P_H A P_H$, где P_H — оператор умножения на характеристическую функцию множества $H \subset \Pi$. Множества $H \in T$ при этом естественно назвать вольтерровыми множествами функционального оператора A. Форма (1) удобна в теории оптимального управления, во-первых, ввиду того, что к ней естественным образом приводятся разнообразные управляемые начально-краевые задачи для самых различных нелинейных уравнений с частными производными, а во-вторых, потому, что такое описание распределенных управляемых систем адекватно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00495) и аналитической целевой ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)» Минобрнауки РФ (регистрационный № 2.1.1/3927).

многим проблемам теории оптимизации (см., например, [1-3] и краткий обзор [4]). В частности, в [1-3] построена теория достаточных условий *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР) уравнений вида (1) по возмущению функции f, управления v и оператора A, даны разнообразные примеры применения полученных общих условий такой устойчивости в конкретных оптимизационных задачах (см. [4]). Аналогичным образом в [2] получены достаточные условия УСГР для вольтерровых функциональных уравнений 2-го рода общего вида в пространстве L_∞^m. В [5] и других работах авторов доклада схема [1-3] получения условий УСГР функциональных уравнений была распространена на случай вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида в банаховом пространстве. В докладе дается обзор полученных авторами достаточных условий УСГР вольтерровых операторных уравнений, а также возможностей их конкретного применения к различным управляемым краевым задачам для нелинейных уравнений с частными производными. Сформулируем теорему УСГР из [5].

Пусть E — банахово пространство, $\mathbb{P}(E)$ — множество всех проекторов на E, то есть линейных ограниченных операторов $P : E \to E$ со свойством $PP = P$ ($\mathbb{P}(E)$ полуупорядочено в смысле отношения $P_1 \subset P_2$, означающего $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$; если $P_1 \subset P_2$, то $(P_2 - P_1) \in \mathbb{P}(E)$). Проектор P назовем *вольтерровым проектором* оператора $F : E \to E$, если $PFP = PF$. Все множество вольтерровых проекторов F обозначим $\mathcal{B}(F)$. Если система $\mathcal{B}(F)$ нетривиальна, то есть состоит не только из нулевого $P = 0$ и единичного $P = I$ операторов, то F будем называть *вольтерровым оператором* (а также вольтерровым оператором на любой нетривиальной подсистеме $\mathcal{B}(F)$). Если $F : E \to E$ вольтерров, то для уравнения

$$z = F[z], \quad z \in E \tag{2}$$

при любом $P \in \mathcal{B}(F)$ естественным образом определяется P-локальный аналог путем замены E на PE, а F на PF, и, соответственно, — понятие P-локального решения. Пусть Ω — класс тех $F : E \to E$, каждому из которых отвечает единственное в E (то есть глобальное) решение (2).

Всякую конечную систему проекторов $\mathcal{T} = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\} \subset \mathcal{B}(F)$ со свойствами $0 = P_0 \subset$ $\subset P_1 \subset \ldots \subset P_k = I$ назовем *вольтерровой цепочкой* оператора F. Введем обозначения: $P_{(\alpha,\beta)}$ — разность проекторов $P_\alpha - P_\beta$; для произвольной системы $\Re \subset \mathbb{P}(E)$ положим $|\Re| \equiv \sup\Big\{\|P\|_{E\to E} :$ $P \in \Re\Big\}$, $\Re^{(-)} \equiv \{P_{(2,1)} : P_1, P_2 \in \Re, P_1 \subset P_2\}$. Если $\mathcal{T} = \{P_0, P_1, \ldots, P_k\}$ — вольтеррова цепочка $F : E \to E$, а функция $\varphi(.) : \mathcal{T}^{(-)} \to \mathbb{R}_+$ и число $\delta > 0$ таковы, что $\varphi(P_{(i,i-1)}) < \delta \ \forall i \in \overline{1,k}$, то цепочку $\mathcal{T}$ назовем *вольтерровой* (φ, δ)*-цепочкой* оператора F.

Пусть: $\mathcal{N}(.) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — неубывающая функция; $\Re \subset \mathbb{P}(E)$ — ограниченное по операторной норме множество, причем $0, I \in \Re$; $\varphi(.) : \Re^{(-)} \to \mathbb{R}_+$ — функция. Оператор $F : E \to E$ отнесем к классу $\mathbb{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$, если $\Re \subset \mathcal{B}(F)$, и для любых $P_1, P_2 \in \Re$, $P_1 \subset P_2$, и любых $x, z, \Delta z \in E$ имеем:

$$\Big\|P_{(2,1)}\Big(F\left[P_1x + P_{(2,1)}z\right] - F\left[P_1x + P_{(2,1)}[z + \Delta z]\right]\Big)\Big\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(P_{(2,1)}) \cdot \mathcal{N}\bigg(\max\Big\{\|P_1x\|_E, \|P_{(2,1)}z\|_E, \big\|P_{(2,1)}[z + \Delta z]\big\|_E\Big\}\bigg) \cdot \big\|P_{(2,1)}[\Delta z]\big\|_E.$$

Обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$ ту часть $\mathbb{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$, каждый элемент F которой при любом $\delta > 0$ обладает лежащей в $\Re$ вольтерровой (φ, δ)-цепочкой. Если $F \in \mathcal{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$, то для любого $P \in$ $\in \mathcal{B}(F)$ уравнение (2) не может иметь более одного P-локального решения.

Т е о р е м а. *Пусть* $F_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi_0) \cap \Omega$ *и* $z_0 \in E$ *— глобальное решение* (2) *при* $F = F_0$. *Тогда при некотором* $\delta > 0$ *для любой* (φ_0, δ)*-цепочки* $\mathcal{T} \equiv \{P_0, P_1, \ldots, P_k\} \subset \Re$ *оператора* F_0 *найдутся числа* $\varepsilon > 0$, $C > 0$ *такие, что, если характеристика* φ *операторного класса* $\mathcal{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$ *обладает свойством*

$$\big|\varphi(P) - \varphi_0(P)\big| \leqslant \varepsilon \quad \forall P \in \Re^{(-)},$$

то каждый оператор $F \in \mathcal{F}(\mathcal{N}, \Re, \varphi)$, *для которого* $\|F[z_0] - F_0[z_0]\|_E \leqslant \varepsilon$, *принадлежит* Ω, *а соответствующее глобальное решение* $z \in E$ *уравнения* (2) *удовлетворяет неравенству* $\|z - z_0\|_E \leqslant C\|F[z_0] - F_0[z_0]\|_E$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.

2. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.

3. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 1998. Вып. 2 (19). С. 138-151.

4. *Сумин В.И.* Вольтерровы функциональные уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. М, 2008. С. 400-401.

5. *Сумин В.И.*, *Чернов А.В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестн. ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 2003. Вып. 1 (26). С. 39-50.

Abstract: The authors give review of their theorems about the existence-stability conditions of global solutions of Volterra operator equations; applications of these theorems to the nonlinear controllable initial boundary value problems is discussed.

Keywords: Volterra operator equations, existence-stability conditions of global solutions.

Сумин Владимир Иосифович
д. ф.-м. н., профессор
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

Vladimir Sumin
doctor of phys.-math. sciences, professor
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: v_sumin@mail.ru

Чернов Андрей Владимирович
к. ф.-м. н., доцент
Нижегородский государственный университет
Россия, Нижний Новгород
e-mail: chavnn@mail.ru

Andrey Chernov
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Nizhniy Novgorod State University
Russia, Nizhniy Novgorod
e-mail: chavnn@mail.ru